

一般均衡：交换、生产与福利定理

根据手写笔记整理、补全与图形重绘

微观经济学复习讲义

2026 年 6 月 9 日

本章一句话

局部均衡只看一个市场；一般均衡同时看所有市场的相互影响。纯交换经济中，竞争均衡把“个人最优化”和“市场出清”合在一起；在凸性与局部非匮乏等条件下，竞争均衡有效率。加入生产以后，还要让消费者之间的边际替代率、企业的投入配置、社会的边际转换率同时对齐价格。

目录

1 导入：什么是一般均衡分析	3
1.1 局部均衡与一般均衡	3
2 纯交换经济：Edgeworth 盒图	3
2.1 两人两商品模型	3
2.2 无差异曲线、帕累托改进与契约曲线	4
2.3 用规划问题推出契约曲线	4
2.4 从契约曲线到效用可能性边界	5
3 纯交换经济中的市场均衡	5
3.1 价格线与个人最优化	5
3.2 竞争均衡的定义	6
4 瓦尔拉斯定律与均衡存在	6
4.1 超额需求函数	6
4.2 瓦尔拉斯定律	7
4.3 均衡存在定理：直观版	7
5 福利经济学第一、第二定理	8
5.1 第一福利定理：竞争均衡有效率	8
5.2 第二福利定理：效率配置可被价格支持	8
5.3 为什么非凸会破坏第二定理	9
6 生产经济：鲁滨逊经济与企业问题	9
6.1 企业利润最大化	9
6.2 消费者的劳动-闲暇选择	10
6.3 鲁滨逊经济的均衡条件	10

目录	2
7 生产的一般均衡：投入盒图与契约曲线	10
7.1 两种投入、两种产品	10
7.2 生产有效率条件	11
7.3 劳动密集、资本密集与契约曲线形状	11
8 生产可能性边界与边际转换率	12
8.1 从生产契约曲线到生产可能性边界	12
8.2 边际转换率 MRT	12
8.3 企业利润最大化与 PPF 切线	12
9 交换加生产的一般均衡	13
9.1 完整均衡的三个层次	13
9.2 若 MRT 与 MRS 不相等，为什么不是效率？	14
9.3 规划问题推导： $MRS_A = MRS_B = MRT$	14
10 本章公式总表	14
11 考试常见问法与答题模板	15
12 简短练习与答案	16
附录：手写稿核对缩略图	18

1 导入：什么是一般均衡分析

1.1 局部均衡与一般均衡

概念

一般均衡分析研究所有商品市场同时满足需求等于供给时，价格与配置如何被共同决定。它不是只问“苹果市场价格怎么变”，而是同时问：苹果、面包、劳动、资本等所有市场一起调整以后，最终的相对价格与资源配置是什么。

在本章中，一般均衡分三层：

1. **纯交换经济**：没有生产，只有初始禀赋，消费者之间交换商品。
2. **生产经济**：有企业把投入转化为产出，研究生产端如何有效配置。
3. **交换加生产的一般均衡**：生产决定社会可行产品组合，消费者在这些产品之间分配，二者共同决定均衡。

本章最核心的三个等式是：

$$\text{纯交换有效率：} \quad \text{MRS}_A^{12} = \text{MRS}_B^{12},$$

$$\text{生产有效率：} \quad \text{MRTS}_1^{LK} = \text{MRTS}_2^{LK},$$

$$\text{交换 + 生产有效率：} \quad \text{MRS}_A^{12} = \text{MRS}_B^{12} = \text{MRT}_{12}.$$

符号约定

为了避免图中斜率的正负号混乱，本讲义统一把

$$\text{MRS}_i^{12} = \frac{MU_i^1}{MU_i^2} = - \frac{dx_i^2}{dx_i^1} \Big|_{u_i=\bar{u}} > 0.$$

无差异曲线在 (x^1, x^2) 图上的斜率是 $-\text{MRS}_i^{12}$ 。同理，生产可能性边界的斜率是 $-\text{MRT}_{12}$ ，其中

$$\text{MRT}_{12} = - \frac{dy_2}{dy_1} \Big|_{T(y)=0} > 0.$$

有些课堂笔记直接把斜率写成 MRS 或 MRT，考试时一定先看老师的符号约定。

2 纯交换经济：Edgeworth 盒图

2.1 两人两商品模型

设有两个消费者 A, B ，两个商品 1, 2。消费者 i 的初始禀赋为

$$\omega_i = (\omega_i^1, \omega_i^2), \quad i = A, B.$$

社会总禀赋是

$$\bar{\omega} = (\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2) = (\omega_A^1 + \omega_B^1, \omega_A^2 + \omega_B^2).$$

一个配置写作

$$x = (x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2).$$

可行配置要求两种商品都不能凭空产生或消失：

$$x_A^1 + x_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1 = \bar{\omega}^1, \quad x_A^2 + x_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2 = \bar{\omega}^2. \quad (1)$$

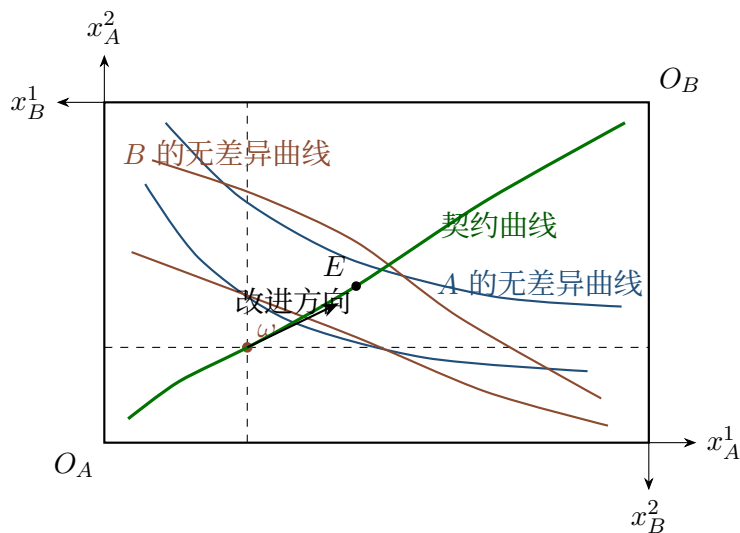


图 1: Edgeworth 盒图: A 的原点在左下, B 的原点在右上。盒子的宽度是商品 1 总量, 长度是商品 2 总量。

盒图中任一点都代表一个可行配置。若点的坐标从 A 的原点看是 (x_A^1, x_A^2) , 那么从 B 的原点看就是

$$x_B^1 = \bar{\omega}^1 - x_A^1, \quad x_B^2 = \bar{\omega}^2 - x_A^2.$$

所以盒图天然把式 (1) 编进了图中。

2.2 无差异曲线、帕累托改进与契约曲线

在盒图中, A 的无差异曲线通常向右上表示更高效用; B 的原点在右上, 所以对 B 来说, 越靠右上越好。若从某个初始禀赋 ω 出发, 存在一个新配置 x' 使得

$$u_A(x'_A) \geq u_A(x_A), \quad u_B(x'_B) \geq u_B(x_B),$$

且至少一个人严格更好, 则 x' 是对 x 的**帕累托改进**。

帕累托有效与契约曲线

一个配置是**帕累托有效**, 如果不存在任何可行配置能让至少一个人变好且没有人变差。所有帕累托有效配置在盒图中形成**契约曲线**。在内点且偏好光滑凸的情形, 契约曲线上的必要条件是

$$\text{MRS}_A^{12} = \text{MRS}_B^{12}.$$

直观上, 若两个人对两种商品的边际替代率不同, 就说明他们对“商品 1 与商品 2 的交换比率”的主观评价不同, 还存在互利交换空间。

2.3 用规划问题推出契约曲线

手写笔记中用“固定 B 的效用, 最大化 A 的效用”的办法推出有效配置。形式化写为:

$$\max_{x_A, x_B} u_A(x_A^1, x_A^2) \quad \text{s.t.} \quad u_B(x_B^1, x_B^2) \geq \bar{u}, \quad x_A^1 + x_B^1 = \bar{\omega}^1, \quad x_A^2 + x_B^2 = \bar{\omega}^2. \quad (2)$$

其中 $\bar{u}$ 是给 B 保留的最低效用水平。改变 $\bar{u}$, 就会得到一串不同的有效点; 这些点连起来就是契约曲线。

令拉格朗日函数为

$$\mathcal{L} = u_A(x_A^1, x_A^2) + \lambda(u_B(x_B^1, x_B^2) - \bar{u}) + \mu_1(\bar{\omega}^1 - x_A^1 - x_B^1) + \mu_2(\bar{\omega}^2 - x_A^2 - x_B^2).$$

一阶条件为

$$\frac{\partial u_A}{\partial x_A^1} = \mu_1, \quad \frac{\partial u_A}{\partial x_A^2} = \mu_2, \quad \lambda \frac{\partial u_B}{\partial x_B^1} = \mu_1, \quad \lambda \frac{\partial u_B}{\partial x_B^2} = \mu_2.$$

两两相除得到

$$\frac{\partial u_A / \partial x_A^1}{\partial u_A / \partial x_A^2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\partial u_B / \partial x_B^1}{\partial u_B / \partial x_B^2}, \quad \text{即} \quad \text{MRS}_A^{12} = \text{MRS}_B^{12}. \quad (3)$$

为什么这就是“无浪费”？

若 $\text{MRS}_A^{12} > \text{MRS}_B^{12}$ ，说明 A 为得到 1 单位商品 1 愿意放弃更多商品 2，而 B 要放弃的商品 2 较少。于是可以让 A 得到一点商品 1、放出一点商品 2，同时让 B 得到商品 2、放出商品 1，存在一段交换能让双方至少不差、甚至更好。只有两者边际替代率相等时，这种微小互利交换才消失。

2.4 从契约曲线到效用可能性边界

手写笔记中还画了一个由 $G_1, G_2, \dots$ 构成的图，它表示效用可能性边界。盒图里的每个可行配置 x 都可以映射到一个效用组合

$$(u_A(x_A), u_B(x_B)).$$

如果只取帕累托有效配置，就得到效用空间里的边界。

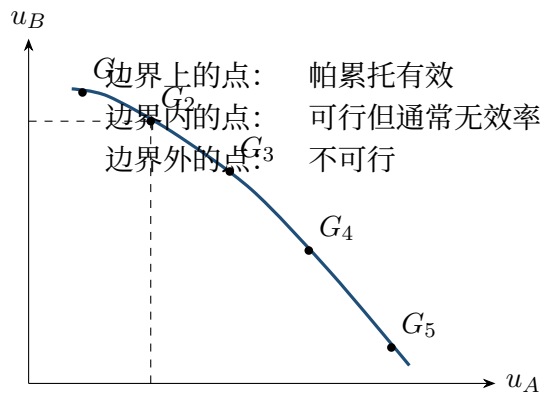


图 2: 效用可能性边界：契约曲线在效用空间中的像。

注意：效用可能性边界不是预算线，也不是生产可能性边界。它描述的是“在总资源既定时，两个人效用之间可以怎样权衡”。

3 纯交换经济中的市场均衡

3.1 价格线与个人最优化

设价格向量为 $p = (p_1, p_2) \gg 0$ 。消费者 i 面临预算约束

$$p_1 x_i^1 + p_2 x_i^2 \leq p_1 \omega_i^1 + p_2 \omega_i^2. \quad (4)$$

右边是他把初始禀赋按市场价格估值后得到的财富。个人需求函数为

$$x_i(p) \in \arg \max_{x_i \geq 0} u_i(x_i) \quad \text{s.t.} \quad p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i.$$

若消费者的最优点在内点，个人一阶条件是

$$\text{MRS}_i^{12} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (5)$$

所以市场价格线的斜率 $-p_1/p_2$ 同时支撑两个人的最优选择。

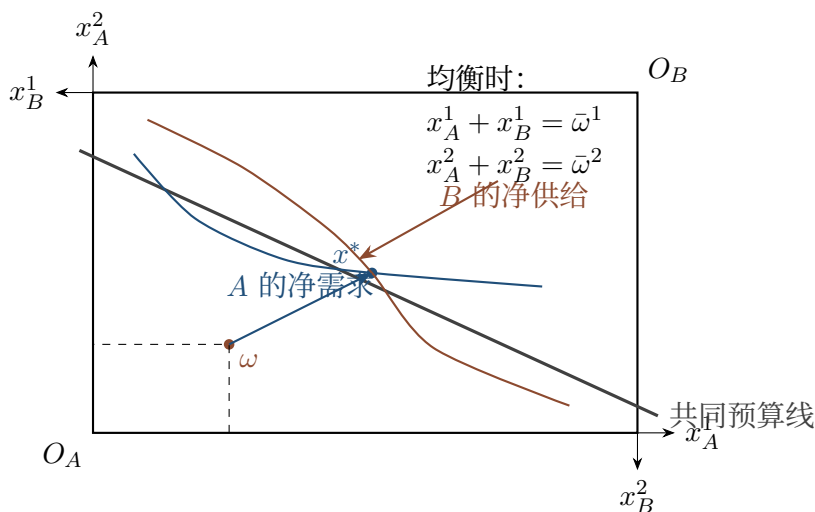


图 3: 纯交换竞争均衡: 同一价格线既通过禀赋点, 也支撑两个人的最优选择, 市场同时出清。

3.2 竞争均衡的定义

纯交换竞争均衡

纯交换经济的竞争均衡是一个价格向量 p^* 与配置 x^* , 满足:

1. **个人最优化:** 对每个消费者 $i = A, B$, x_i^* 解决预算约束下的效用最大化问题;
2. **市场出清:** $x_A^{1*} + x_B^{1*} = \bar{\omega}^1$ 且 $x_A^{2*} + x_B^{2*} = \bar{\omega}^2$;
3. **价格非零:** 通常取 $p^* \gg 0$, 且价格只由相对价格决定, 所以可规范化为 $p_1 + p_2 = 1$ 或 $p_2 = 1$ 。

若某一价格下, 商品 1 的总需求大于总供给, 商品 1 价格会有上升压力; 若总供给大于总需求, 价格会有下降压力。均衡就是这种价格调整压力消失的状态。

4 瓦尔拉斯定律与均衡存在

4.1 超额需求函数

定义总超额需求

$$z(p) = x_A(p) + x_B(p) - \bar{\omega}. \quad (6)$$

两商品情形下,

$$z_1(p) = x_A^1(p) + x_B^1(p) - \bar{\omega}^1, \quad z_2(p) = x_A^2(p) + x_B^2(p) - \bar{\omega}^2.$$

市场出清就是

$$z_1(p^*) = 0, \quad z_2(p^*) = 0.$$

4.2 瓦尔拉斯定律

每个消费者在局部非饱和下会用完预算，因此

$$p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i.$$

对 A, B 加总：

$$p \cdot x_A(p) + p \cdot x_B(p) = p \cdot \omega_A + p \cdot \omega_B = p \cdot \bar{\omega}.$$

移项得到：

$$p \cdot z(p) = p_1 z_1(p) + p_2 z_2(p) = 0. \quad (7)$$

瓦尔拉斯定律

所有市场的超额需求按价格加权求和恒等于零。若价格均为正，并且 $n-1$ 个市场已经出清，那么第 n 个市场也必然出清。

两商品情形中，若 $z_1(p) = 0$ ，则由 (7)

$$p_2 z_2(p) = 0.$$

只要 $p_2 > 0$ ，就有 $z_2(p) = 0$ 。这就是手写笔记中“若 1 市场供需相等，则 2 市场供需也必定相等”的逻辑。

容易错的地方

瓦尔拉斯定律不等于“市场一定出清”。它只说价值意义下的超额需求恒为零。真正的均衡还需要找到某个价格 p^* 使每个单独市场的超额需求都为零。

4.3 均衡存在定理：直观版

在标准 Arrow-Debreu 交换经济中，如果满足以下条件，通常可以保证竞争均衡存在：

- 消费集合闭且凸，例如 $X_i = \mathbb{R}_+^L$ ；
- 偏好连续、凸、局部非饱和；
- 社会总禀赋严格为正，即每种商品总量都大于零；
- 需求对应满足适当的连续性/上半连续性。

直观证明思路是：把价格规范化到单纯形

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}_+^L : \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\},$$

然后用 Brouwer 或 Kakutani 不动点定理证明存在一个价格 p^* ，在这个价格下价格调整规则不会再改变价格，从而 $z(p^*) \leq 0$ ；再由瓦尔拉斯定律得到市场出清。

5 福利经济学第一、第二定理

5.1 第一福利定理：竞争均衡有效率

第一福利定理

在偏好局部非饱和、市场完全、价格竞争且没有外部性等条件下，任何竞争均衡配置都是帕累托有效的。

证明思路

设 (p^*, x^*) 是竞争均衡。反设存在一个可行配置 y 帕累托改进 x^* ，即

$$u_i(y_i) \geq u_i(x_i^*) \quad (i = A, B),$$

且至少一个人严格更好。

因为 x_i^* 是消费者 i 在预算集中的最优选择，如果 y_i 至少一样好，那么 y_i 不可能比 x_i^* 更便宜；若某人严格更好，在局部非饱和下需要严格更贵。因此

$$p^* \cdot y_i \geq p^* \cdot \omega_i,$$

且至少一个 i 为严格不等号。加总得到

$$p^* \cdot (y_A + y_B) > p^* \cdot (\omega_A + \omega_B) = p^* \cdot \bar{\omega}.$$

但 y 可行意味着 $y_A + y_B = \bar{\omega}$ ，矛盾。所以竞争均衡无法被帕累托改进。

第一定理说明市场均衡没有“交换浪费”，但不说明分配公平。一个很不平等的初始禀赋也可能产生帕累托有效的均衡。

5.2 第二福利定理：效率配置可被价格支持

第二福利定理

若偏好凸、生产集合凸，并满足技术性正则条件，则每一个帕累托有效配置都可以通过适当的初始禀赋再分配或转移支付，被某个价格体系支持为竞争均衡。

图形直觉是：在凸偏好下，帕累托有效点处可以画出一条共同支撑线，这条线的斜率就是相对价格。只要把每个人的财富重新分配到恰好买得起该点，个人最优化就会选择这个点。

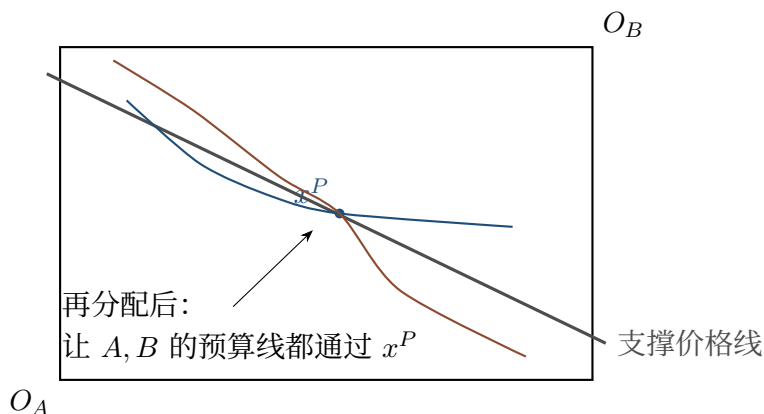


图 4：第二福利定理：凸性保证帕累托有效点可以被一条共同价格线支撑。

5.3 为什么非凸会破坏第二定理

手写笔记中画了“非凸偏好可能违反第二定理”的图。关键原因是：第二定理需要用一条线把可达到的更好集合和当前配置分开；非凸时，这样的支撑线可能不存在。

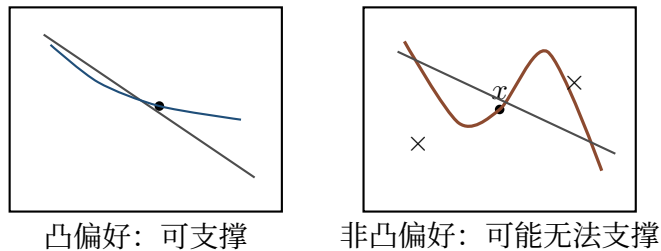


图 5: 凸性是“效率配置可分散化为竞争均衡”的关键条件。

6 生产经济：鲁滨逊经济与企业问题

6.1 企业利润最大化

先看最简单的单人经济或鲁滨逊经济：有一种消费品 C ，一种劳动投入 L ，生产函数

$$C = F(L), \quad F' > 0, \quad F'' < 0.$$

若消费品价格为 p_C ，工资为 w ，企业利润为

$$\pi = p_C F(L) - wL. \quad (8)$$

企业选择劳动需求 L^* ：

$$\max_L p_C F(L) - wL. \quad (9)$$

内点一阶条件是

$$p_C F'(L^*) = w, \quad \text{或} \quad F'(L^*) = \frac{w}{p_C}. \quad (10)$$

若把 p_C 规范化为 1，就得到手写笔记中的

$$\frac{\partial C}{\partial L} = w.$$

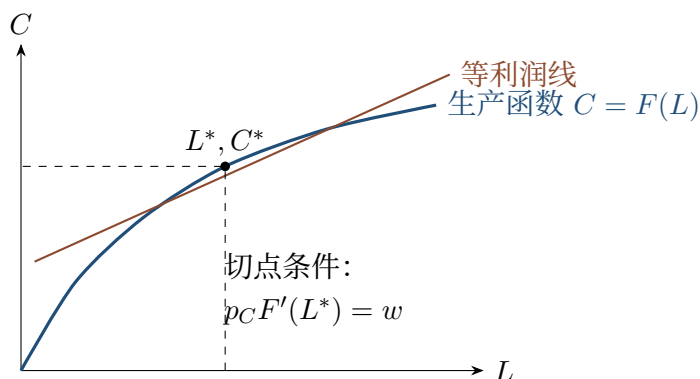


图 6: 企业在生产函数上选择使利润最大的劳动投入。等利润线越高，利润越大；最优处斜率等于实际工资。

6.2 消费者的劳动-闲暇选择

设总时间禀赋为 $\bar{L}$ ，闲暇为 ℓ ，劳动供给为 $L_s = \bar{L} - \ell$ 。消费者拥有企业利润 π ，预算约束为

$$p_C c \leq \pi + w(\bar{L} - \ell). \quad (11)$$

写成消费-闲暇图上的直线：

$$c \leq \frac{\pi}{p_C} + \frac{w}{p_C} \bar{L} - \frac{w}{p_C} \ell. \quad (12)$$

预算线斜率为 $-w/p_C$ 。若内点最优，消费者条件为

$$\text{MRS}_{\ell c} = \frac{MU_\ell}{MU_c} = \frac{w}{p_C}. \quad (13)$$

直观上，工资越高，闲暇的机会成本越高；消费者愿意少享受闲暇、多供给劳动。

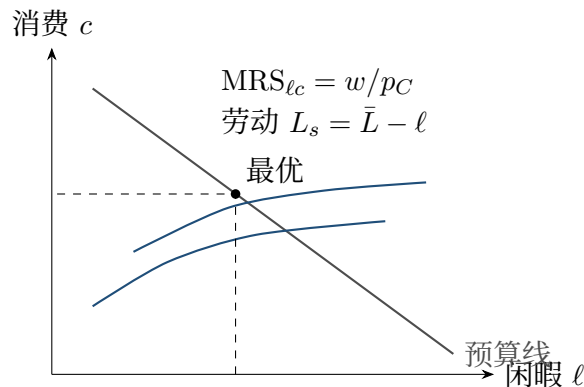


图 7: 消费者在闲暇和消费之间选择；预算线斜率由实际工资决定。

6.3 鲁滨逊经济的均衡条件

鲁滨逊经济虽然只有一个人，但仍然可以分成“作为企业的他”和“作为消费者的他”：

- 生产端： $p_C F'(L^*) = w$ ；
- 消费端： $\text{MRS}_{\ell c} = w/p_C$ ；
- 市场出清：消费等于产出 $c^* = F(L^*)$ ，劳动供给等于劳动需求 $\bar{L} - \ell^* = L^*$ ；
- 利润回到消费者： $\pi^* = p_C F(L^*) - wL^*$ 。

因此均衡时

$$\text{MRS}_{\ell c} = \frac{w}{p_C} = F'(L^*).$$

这说明闲暇和消费之间的主观边际替代率，等于生产中劳动转化为消费品的客观边际产出。

7 生产的一般均衡：投入盒图与契约曲线

7.1 两种投入、两种产品

现在有两种投入：劳动 L 与资本 K ；两种产品：商品 1 与商品 2。总投入为 $(\bar{L}, \bar{K})$ 。若分配给商品 1 的投入是 (L_1, K_1) ，分配给商品 2 的投入是

$$L_2 = \bar{L} - L_1, \quad K_2 = \bar{K} - K_1.$$

生产函数为

$$y_1 = F_1(L_1, K_1), \quad y_2 = F_2(L_2, K_2).$$

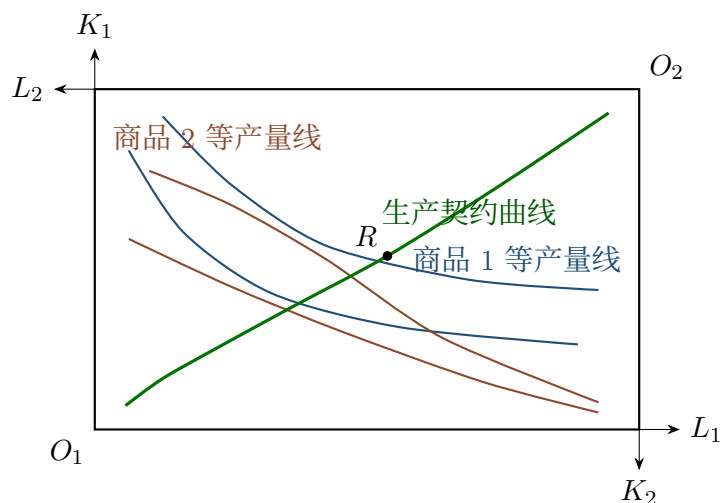


图 8: 生产 Edgeworth 盒图：盒子的宽度是劳动总量，长度是资本总量。契约曲线上的点满足两部门等产量线相切。

7.2 生产有效率条件

若某个投入配置不在生产契约曲线上，就可以在不减少一种产品产量的情况下增加另一种产品产量，说明存在生产浪费。内点有效配置的条件是

$$\text{MRTS}_1^{LK} = \text{MRTS}_2^{LK}, \quad (14)$$

其中

$$\text{MRTS}_j^{LK} = \frac{MP_{L,j}}{MP_{K,j}}$$

表示在生产商品 j 时，劳动与资本的边际技术替代率。

为什么 $\text{MRTS}_1 \neq \text{MRTS}_2$ 就有浪费？

若商品 1 部门中劳动相对于资本的边际产出很高，而商品 2 部门中劳动相对于资本的边际产出较低，就可以把一点劳动从商品 2 部门调到商品 1 部门，同时把一点资本反向调整。只要两部门的 MRTS 不同，就存在一种投入再分配使总产出集合变大。只有 $\text{MRTS}_1 = \text{MRTS}_2$ 时，这种边际再分配收益为零。

7.3 劳动密集、资本密集与契约曲线形状

手写笔记中提到，生产盒图中契约曲线的形状会受到部门要素密集度影响。若商品 1 是劳动密集型，商品 2 是资本密集型，则在相同要素价格下，商品 1 部门会使用相对更多劳动，商品 2 部门会使用相对更多资本。图形上，契约曲线可能向某一侧弯曲。考试通常不要求精确画出形状，但要求理解：

- 契约曲线不是任意画的，它由两部门等产量线的切点组成；
- 每个切点都对应一个生产有效的投入配置；
- 契约曲线上的每个投入配置再映射到产出空间，得到生产可能性边界。

8 生产可能性边界与边际转换率

8.1 从生产契约曲线到生产可能性边界

生产契约曲线上的每个点 R 给出一组有效投入分配 (L_1, K_1, L_2, K_2) ，进而得到一组产出 (y_1, y_2) 。把这些产出点连起来，就得到生产可能性边界（PPF）。

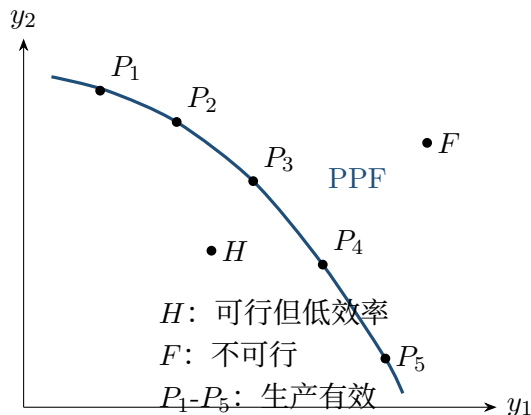


图 9: 生产可能性边界：边界内可行但有浪费，边界外不可行，边界上生产有效。

若技术进步或资源增加，PPF 会向外移动；若资源减少或技术退步，PPF 会向内移动。

8.2 边际转换率 MRT

PPF 的斜率刻画了社会把一种商品转换成另一种商品的机会成本。若 PPF 写作 $y_2 = g(y_1)$ ，且 $g' < 0$ ，则

$$\text{MRT}_{12} = -\frac{dy_2}{dy_1} = -g'(y_1) > 0. \quad (15)$$

它表示多生产 1 单位商品 1，需要牺牲多少商品 2。

若用转换函数 $T(y_1, y_2) = 0$ 表示 PPF，对其全微分：

$$T_1 dy_1 + T_2 dy_2 = 0.$$

所以

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{T_1}{T_2}, \quad \text{MRT}_{12} = \frac{T_1}{T_2} \quad (16)$$

这里默认 $T_1/T_2 > 0$ 。若教材对 T 的正负方向定义不同，只需记住：PPF 图上的斜率是 $-\text{MRT}$ 。

8.3 企业利润最大化与 PPF 切线

在产出价格 (p_1, p_2) 下，社会总产值为

$$p_1 y_1 + p_2 y_2.$$

生产端选择 PPF 上让总产值最高的点：

$$\max_{(y_1, y_2) \in Y} p_1 y_1 + p_2 y_2.$$

等收益线为

$$y_2 = \frac{\bar{R}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} y_1.$$

在切点处，等收益线斜率等于 PPF 斜率，因此

$$\text{MRT}_{12} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (17)$$

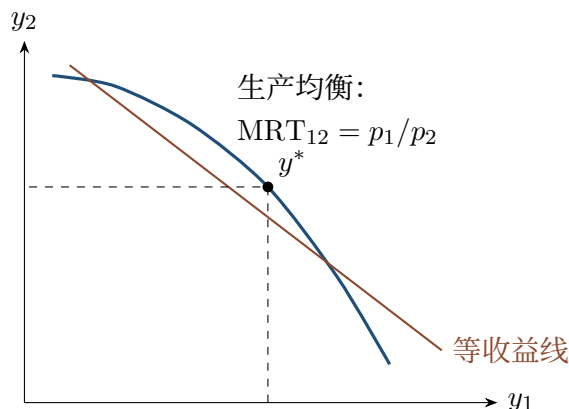


图 10: 生产者在 PPF 上选择价值最高的产出组合，切点满足 MRT 等于相对价格。

9 交换加生产的一般均衡

9.1 完整均衡的三个层次

加入生产后，均衡不只要求消费者之间交换有效，还要求生产端和消费端相互一致。一个完整的一般均衡包含：

1. **生产最优化**：企业在价格下选择利润最大化的投入与产出；
2. **消费最优化**：消费者在收入约束下选择效用最大化的消费束；
3. **所有市场出清**：商品市场、劳动市场、资本市场同时出清。

在两商品两消费者模型中，若是内点均衡，则

$$\text{MRS}_A^{12} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{MRS}_B^{12} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{MRT}_{12} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (18)$$

因此

$$\boxed{\text{MRS}_A^{12} = \text{MRS}_B^{12} = \text{MRT}_{12}.} \quad (19)$$

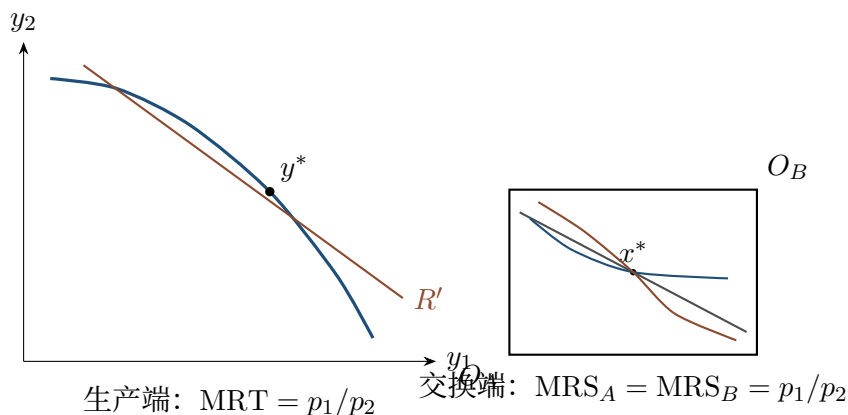


图 11: 交换加生产的一般均衡：同一相对价格同时支撑生产点和消费分配。

9.2 若 MRT 与 MRS 不相等, 为什么不是效率?

设消费者共同的边际替代率是 $MRS = 2$, 而生产端的边际转换率是 $MRT = 1$ 。含义是:

- 消费者愿意用 2 单位商品 2 换 1 单位商品 1;
- 生产上只需要牺牲 1 单位商品 2, 就能多生产 1 单位商品 1。

那么社会可以多生产一点商品 1、少生产一点商品 2, 再把商品 1 给消费者。消费者的主观收益大于生产机会成本, 因此存在帕累托改进。只有当

$$MRS = MRT$$

时, 消费偏好和生产机会成本才相互吻合。

9.3 规划问题推导: $MRS_A = MRS_B = MRT$

社会计划者问题可以写为

$$\max_{x_A, x_B, y} u_A(x_A^1, x_A^2) \quad (20)$$

约束为

$$u_B(x_B^1, x_B^2) \geq \bar{u}, \quad x_A^1 + x_B^1 = y_1, \quad x_A^2 + x_B^2 = y_2, \quad T(y_1, y_2) = 0. \quad (21)$$

把 $y = x_A + x_B$ 代入转换函数, 也可写为

$$T(x_A^1 + x_B^1, x_A^2 + x_B^2) = 0.$$

拉格朗日函数为

$$\mathcal{L} = u_A(x_A) + \lambda(u_B(x_B) - \bar{u}) + \mu T(x_A^1 + x_B^1, x_A^2 + x_B^2).$$

一阶条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A^1} &= u_{A1} + \mu T_1 = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A^2} &= u_{A2} + \mu T_2 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B^1} &= \lambda u_{B1} + \mu T_1 = 0, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B^2} &= \lambda u_{B2} + \mu T_2 = 0. \end{aligned}$$

把第一组相除:

$$\frac{u_{A1}}{u_{A2}} = \frac{T_1}{T_2}.$$

把第二组相除:

$$\frac{u_{B1}}{u_{B2}} = \frac{T_1}{T_2}.$$

于是

$$\frac{u_{A1}}{u_{A2}} = \frac{u_{B1}}{u_{B2}} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \text{即} \quad MRS_A^{12} = MRS_B^{12} = MRT_{12}. \quad (22)$$

这正是手写笔记最后一页拉格朗日推导的核心结论。

10 本章公式总表

主题	公式与含义
纯交换可行性	$x_A^1 + x_B^1 = \bar{\omega}^1, x_A^2 + x_B^2 = \bar{\omega}^2$ 。盒图中任一点都是可行配置。
MRS	$MRS_i^{12} = MU_i^1 / MU_i^2 = -dx_i^2 / dx_i^1 _{u_i}$ 。无差异曲线斜率为 $-MRS$ 。

交换帕累托效率	$MRS_A^{12} = MRS_B^{12}$ 。若不同, 存在互利交换空间。
消费者预算	$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i$ 。初始禀赋按价格估值形成财富。
消费者均衡	$MRS_i^{12} = p_1/p_2$ 。价格比等于主观边际替代率。
超额需求	$z(p) = \sum_i x_i(p) - \sum_i \omega_i$ 。市场出清要求 $z(p^*) = 0$ 。
瓦尔拉斯定律	$p \cdot z(p) = 0$ 。若 $L - 1$ 个市场出清且价格为正, 则最后一个市场也出清。
第一福利定理	竞争均衡配置帕累托有效。核心假设: 局部非龋足、完全市场、无外部性、价格接受。
第二福利定理	在凸性等条件下, 任一帕累托有效配置可由适当再分配支持为竞争均衡。
企业利润	$\pi = pF(L) - wL$, 一阶条件 $pF'(L) = w$ 。
劳动-闲暇	$pc \leq \pi + w(\bar{L} - \ell)$, 内点条件 $MRS_{\ell c} = w/p_c$ 。
生产投入效率	$MRTS_1^{LK} = MRTS_2^{LK}$ 。两部门等产量线相切。
PPF 与 MRT	$MRT_{12} = -dy_2/dy_1 = T_1/T_2$ 。PPF 斜率为 $-MRT$ 。
生产均衡	$MRT_{12} = p_1/p_2$ 。PPF 与等收益线相切。
交换 + 生产效率	$MRS_A^{12} = MRS_B^{12} = MRT_{12}$ 。消费者愿意交换的比率等于生产转换的机会成本。

11 考试常见问法与答题模板

1. 解释 Edgeworth 盒图中一点代表什么

答: 盒图中的一点同时代表两个人的商品分配。以左下角为 A 的原点, 点的横纵坐标是 (x_A^1, x_A^2) ; 以右上角为 B 的原点, 反向读出 (x_B^1, x_B^2) 。由于盒子的长宽就是社会总禀赋, 所以盒内任一点自动满足资源约束。

2. 为什么契约曲线上的点满足 $MRS_A = MRS_B$

答: 若两人的边际替代率不同, 说明他们对两种商品的边际交换比率评价不同, 可以设计一个小交换让一方变好而另一方不变差。因此内点帕累托有效要求无差异曲线相切, 即 $MRS_A = MRS_B$ 。

3. 瓦尔拉斯定律说明了什么, 不说明什么

答: 它说明总超额需求的价值为零, 即 $p \cdot z(p) = 0$ 。它推出“若 $L - 1$ 个市场出清且价格为正, 则最后一个市场也出清”。但它不保证一定存在市场出清价格, 存在性还需要连续性、凸性、不动点定理等条件。

4. 第一福利定理与第二福利定理的区别

答: 第一福利定理从市场均衡推出效率: 竞争均衡一定帕累托有效。第二福利定理从效率配置推出市场实现: 在凸性等条件下, 任何帕累托有效配置都能通过再分配被某个价格体系支持为竞争均衡。第一定理不解决公平; 第二定理说明效率与分配可以在理论上分开处理。

5. 为什么非凸会影响第二福利定理

答：第二福利定理依赖支撑超平面。凸偏好或凸生产集合使得帕累托有效点处可以画出支撑价格线；非凸时可能不存在这样的价格线，即使某配置帕累托有效，也无法通过竞争性价格和一次性财富再分配实现。

6. 生产盒图和交换盒图有什么区别

答：交换盒图的坐标是两种消费品在两个人之间的分配；生产盒图的坐标是两种投入在两个生产部门之间的分配。交换盒图的有效条件是消费者无差异曲线相切，即 $MRS_A = MRS_B$ ；生产盒图的有效条件是两部门等产量线相切，即 $MRTS_1 = MRTS_2$ 。

7. MRT 为什么等于价格比

答：生产者在 PPF 上选择使 $p_1 y_1 + p_2 y_2$ 最大的产出组合。等收益线斜率是 $-p_1/p_2$ ，PPF 斜率是 $-MRT_{12}$ 。切点处两者相等，所以 $MRT_{12} = p_1/p_2$ 。

8. 为什么交换加生产效率要求 $MRS = MRT$

答：MRS 是消费者主观上愿意用商品 2 换商品 1 的比率，MRT 是生产上多生产商品 1 要牺牲商品 2 的客观机会成本。若二者不同，就能调整生产结构和消费分配，让消费者主观收益大于生产成本，从而产生帕累托改进。效率要求二者相等。

12 简短练习与答案

练习 1：盒图可行性

设 $\bar{\omega}^1 = 10, \bar{\omega}^2 = 8$ ，若 A 获得 (3, 5)，则 B 获得多少？

答案：B 获得 (7, 3)。因为 $x_B^1 = 10 - 3 = 7$ ， $x_B^2 = 8 - 5 = 3$ 。

练习 2：MRS 与帕累托效率

在某配置下 $MRS_A^{12} = 4$ ， $MRS_B^{12} = 2$ 。该配置是否可能是内点帕累托有效？为什么？

答案：不是。A 愿意用 4 单位商品 2 换 1 单位商品 1，B 只要求 2 单位商品 2 就愿意放弃 1 单位商品 1，因此存在互利交换空间。

练习 3：瓦尔拉斯定律

两商品经济中， $p = (2, 1)$ ， $z_1(p) = 0$ 。若瓦尔拉斯定律成立，求 $z_2(p)$ 。

答案：由 $2z_1 + 1z_2 = 0$ ，且 $z_1 = 0$ ，得 $z_2 = 0$ 。

练习 4：生产者均衡

若 $F(L) = 10\sqrt{L}$ ，消费品价格 $p = 1$ ，工资 $w = 2$ ，求企业劳动需求 L^* 。

答案： $F'(L) = 5/\sqrt{L}$ 。一阶条件 $5/\sqrt{L} = 2$ ，故 $\sqrt{L} = 2.5$ ， $L^* = 6.25$ 。

练习 5: MRT 与价格

若 PPF 在某点斜率为 -3 , 则生产端均衡时 p_1/p_2 应为多少?

答案: $MRT_{12} = 3$, 因此 $p_1/p_2 = 3$ 。

练习 6: 交换加生产

若均衡价格比 $p_1/p_2 = 2$, 那么内点均衡中 A, B 的 MRS 与生产 MRT 分别是多少?

答案: $MRS_A^{12} = MRS_B^{12} = MRT_{12} = 2$ 。

附录：手写稿核对缩略图

以下缩略图用于核对整理范围。正文已经将手稿中的核心公式、图形、证明思路与缺漏处补全为可读版本。

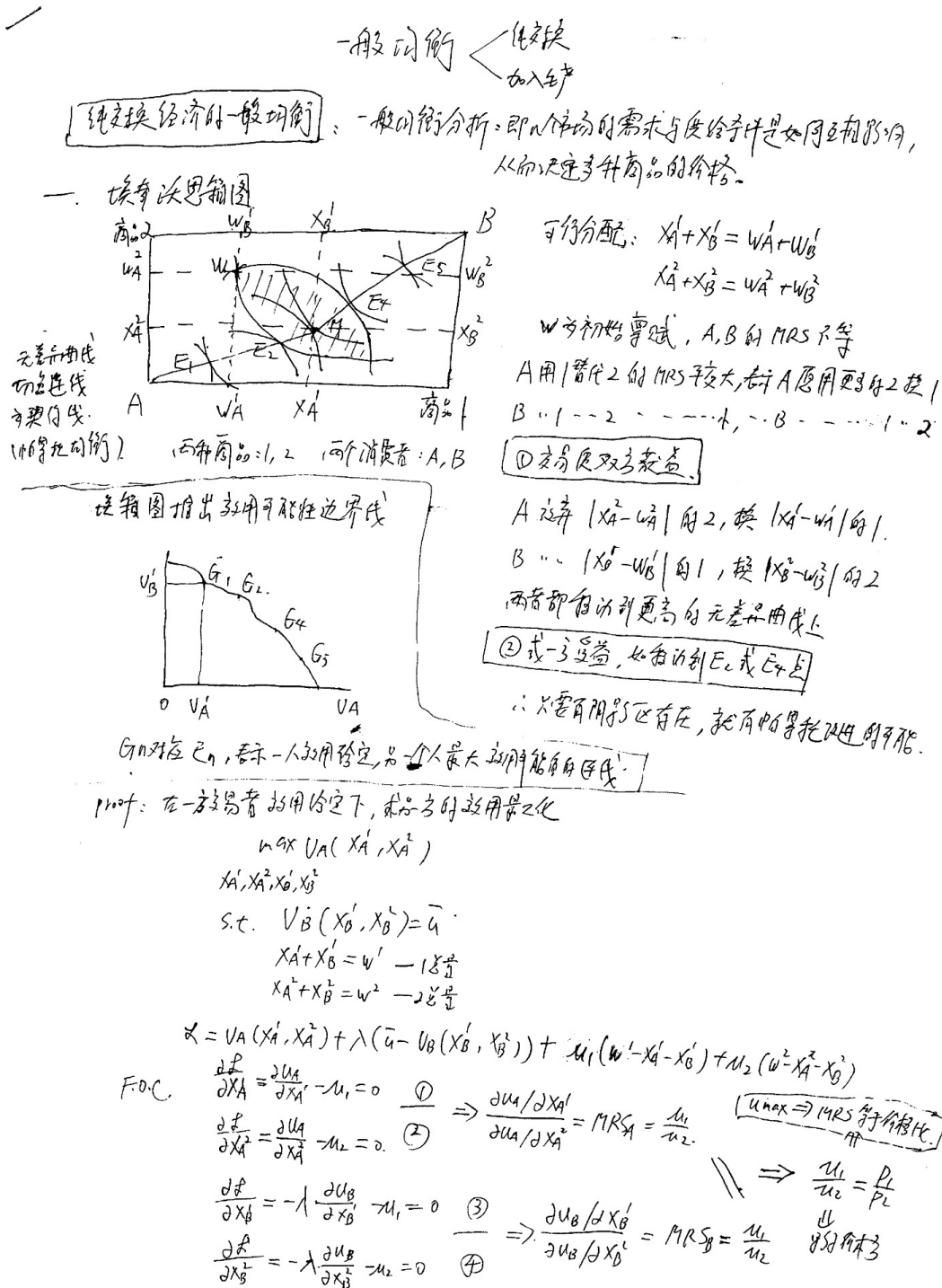
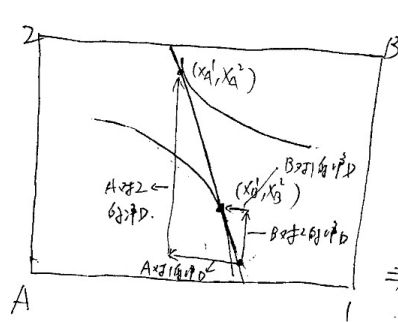


图 12: *

二、市內交易

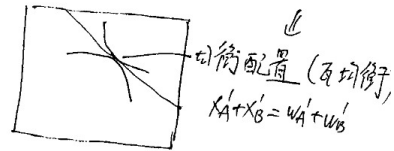


不相邻状态: $D \neq S$.

A 想买(卖)数量 $\neq B$ 想买(卖)数量

若1有超额供给,拍卖商会降低1的价格

2. -- 需求, 2. -- 供给



三. 瓦尔拉斯定理:

反倾向的代數式 $X_A'(p, R)$ 需求函数
 $X_B'(p, R)$

$\exists p_1, p_2$, 使得

$$\text{理想总量} = \text{可执行总量}$$

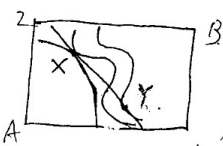
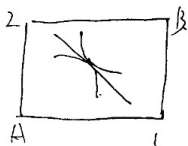
$$X_A'(p, p_c) + X_B'(p, p_c) = w_A' + w_B'$$

$$X_A^2(p, p_c) + X_B^2(p, p_c) = W_A^2 + W_B^2$$

1. 超额需求 $Z(p_1, p_2) = [X_A'(p_1, p_2) - W_A'] + [X_B'(p_1, p_2) - W_B'] = e_A'(p_1, p_2) + e_B'(p_1, p_2)$

B. 福利经济学第二定理：多个帕累托有效配置均能达到竞争性均衡。

效率/分配 (公平)



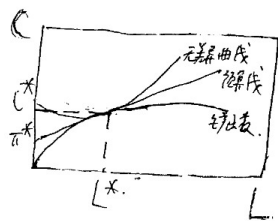
非凸性偏好可能会违反第二定理

财富分配效率

A选Y, B选X
帕累托有效无法达到

含义：分配和效率分开考虑
任何帕累托配置都会得到福利的支持。
改变初始禀赋时不影响帕累托效率。

生产的一般均衡：单人经济：鲁-克经济 (生产者、消费者)



预算 $\pi = C - wL \Rightarrow C = \pi + wL$

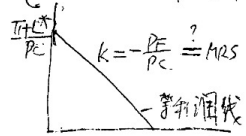
等利润线

生产函数: $C(L)$ $\frac{\partial C}{\partial L} = w$

无谓曲线：劳动与椰子的替代关系 (good-bad)

提供 L^* 消费 C^* 得到 π^* 利润

二. 面对人/公司：鲁+星朝之



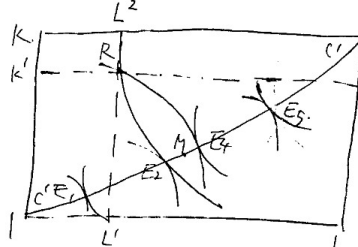
$\max \pi = P_C \cdot C + P_F \cdot F - W_C L_C - W_F L_F$

$\pi = P_C \cdot C + P_F \cdot F - L^*$

$\Rightarrow C = \frac{\pi + L^*}{P_C} - \frac{P_F \cdot F}{P_C}$

两种商品 (C, F)
 L_C - 克马的 $\Rightarrow W_C$
 L_F - 会劳动 $\Rightarrow W_F$

三. 生产的帕累托：两种投入 K, L 两种产品 $\Rightarrow$ 等产量线



R不是资源有效点
即而言 L 替代 K 的 $MRTS$ 较高, 即 MP_L 较大, MP_K 较小
即而言, $L \rightarrow K$ 低, 即 MP_L 较小, MP_K 较大

1. 生产 L 较有生产率

2. $\dots K \dots$

将 L 从 2 中移出来投入 1 中, 可同时提高二产
将 $K \dots 1 \dots \dots \dots$ 2 中, 产量

或一个提高, 一个不变

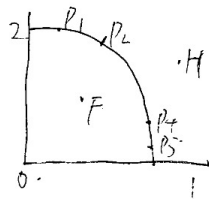
生产的帕条件：相切的等产量线

$C-C'$ 契约线

契约线上: $MRTS_1 = MRTS_2$

图 14: *

四. 生产可能性边界: 由契约线导出, $E_1 \rightarrow P_1$, 在生产和投入空间变化为产品的转换空间

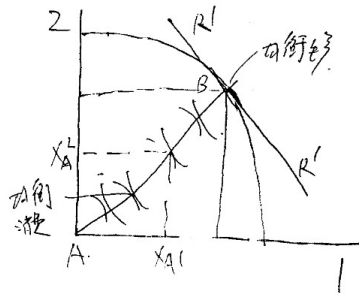


转换函数: 在既定资源下, 社会从又商品转换到商品生产
或从 $y \dots \dots x$ 的转换

$$MRT_{xy} = -\frac{dy}{dx} = \frac{\partial T/\partial x}{\partial T/\partial y} \rightarrow \text{反映产品转换的成本成本}$$

$P_1, P_2, P_3 \rightarrow$ 有效率 F 无效率 H 不能达到

五. 生产与交易的一般均衡: 生产与交易同时达到均衡, 条件: $MRT_{12} = MRS_{12}^A = MRS_{12}^B = -\frac{dx}{dx_2}$



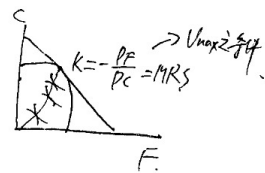
若 $MRT \neq MRS$ 假设 $MRS=2$, $MRT=1$,
表明消费者愿意放弃 2 单位 2 而得到 1 单位的 1,

生产者愿意放弃 1 单位 1 而得到 2 单位的 2

说明更看重 1, 重新配置资源得增加的 1 是必要的

直到 $MRT = MRS$ 为止

$\frac{dx}{dx_2}$ 是斜率



证明: $\max U_A(x_A^1, x_A^2)$

$x_A^1, x_A^2, x_B^1, x_B^2$

s.t. $\begin{cases} U_B(x_B^1, x_B^2) = \bar{u} \\ T(x^1, x^2) = 0 \end{cases}$

举例: $x^2 + 2y^2 = 900$

$\rightarrow$ 转换函数表明在生产可能性边界上

$\mathcal{L} = U_A(x_A^1, x_A^2) + \lambda(\bar{u} - U_B(x_B^1, x_B^2)) + \mu(0 - T(x^1, x^2))$

F.O.C $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A^1} = \frac{\partial U_A}{\partial x_A^1} - \mu \frac{\partial T}{\partial x^1} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A^2} = \frac{\partial U_A}{\partial x_A^2} - \mu \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0$ ① $\frac{\partial U_A/\partial x_A^1}{\partial U_A/\partial x_A^2} = \frac{\partial T/\partial x^1}{\partial T/\partial x^2}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B^1} = -\lambda \frac{\partial U_B}{\partial x_B^1} - \mu \frac{\partial T}{\partial x^1} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B^2} = -\lambda \frac{\partial U_B}{\partial x_B^2} - \mu \frac{\partial T}{\partial x^2} = 0$ ② $\frac{\partial U_B/\partial x_B^1}{\partial U_B/\partial x_B^2} = \frac{\partial T/\partial x^1}{\partial T/\partial x^2}$

经济福利经济学第一定理: 在包含生产的经济中, 所形成的竞争均衡必定是帕累托有效的。

—— 二 —— 加上凸性假设的前提下, 帕累托有效可通过竞争均衡达到。

图 15: *